МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(Государственный университет)

МЕЖВУЗОВСКИЙ ЦЕНТР ВОСПИТАНИЯ И РАЗВИТИЯ
ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ В ОБЛАСТИ
ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
(ФИЗТЕХ-ЦЕНТР)

45

Выездная физико-математическая олимпиада

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Москва, 2006

Задачи по математике

М1. При каких n сумма всех n-значных чисел оканчивается ровно на 2006 нулей?

М2. Десять волейбольных команд сыграли между собой турнир в один круг. За выигрыш давалось одно очко, за проигрыш – ноль. Докажите, что если команда, занявшая n-ое место набрала x_n очков $(n = 1, 2, \ldots, 10)$, то $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 165$.

М3. Четырехугольник $ABCD$ касается вписанной в него окружности в точках K, L, M, N. Точка P, лежащая внутри $KLMN$, соединена отрезками с точками A, B, C, D. Эти отрезки делят стороны четырехугольника $KLMN$ на 8 частей, которые поочередно раскрашены в два цвета – красный и синий. Докажите, что произведение длин красных отрезков равно произведению длин синих отрезков.

М4. Из точки A, лежащей на основании правильной n-угольной пирамиды, восстановили перпендикуляр к основанию, пересекающий плоскости боковых граней в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Докажите, что сумма $AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n$ не зависит от выбора точки A.

М5. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_{2006}$ состоит из натуральных чисел, причем при $n \geq 2$ выполняется $x_n = 2x_{n-1} + n$. Найдите все x_1, при которых последовательность содержит число 2006.

М6. Можно ли в клетки таблицы 5×5 записать числа от 1 до 25 так, чтобы разность в любых двух соседних (по стороне) клетках была
а) не больше трех; б) не меньше 12?

М7. На продолжении стороны BC параллелограмма $ABCD$ за точку C взята точка E так, что $BC = CE$. Прямая, параллельная диагонали AC, пересекает отрезки AD, CD, AE и CE в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что $KL = MN$.

М8. Возрастающая арифметическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Может ли сумма 2005 последовательных членов прогрессии равняться числу
а) n^{2006}; б) 2006^n (n – натуральное)?

М9. Докажите неравенство

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \leq \frac{4}{3}(ac + bd)^2, \text{ где } a, b, c, d \in [1; \sqrt{3}].$$

Задачи по физике

Ф1. Веревка длины $20\,м$ переброшена через блок. В начальный момент веревка висит симметрично относительно вертикальной прямой, пересекающей ось блока и покоится, затем, в результате незначительного толчка, начинает двигаться по блоку. Будет ли движение веревки равномерно ускоренным? Какова будет скорость веревки, когда она сойдет с блока? (массой и размером блока пренебречь).

Ф2. В цепь, состоящую из аккумулятора и сопротивления $R = 10\,ом$ включают вольтметр, сначала последовательно, затем параллельно R. Оба показания вольтметра одинаковы. Сопротивление вольтметра $R_v = 1000\,ом.$ Каково внутреннее сопротивление аккумулятора?

Ф3. В сосуд объемом $V = 10\,л$, наполненный сухим воздухом при нормальных условиях $(P = 1\,атм, T_0 = 0^0C)$ вводят $m = 3\,г$ воды и нагревают сосуд до $T = 100^0C$. Определить давление влажного воздуха P_x в сосуде при этой температуре.

Ф4. Человек с близорукими глазами может читать мелкий шрифт на расстоянии не более 18 см от глаз. Чему равны оптическая сила и фокусное расстояние очков, восполняющих недостаток таких близоруких глаз?

Ф5. Цилиндрический бак диаметром $d = 20\,см$ и высотой $h = 1\,м$ наполнен водой и посредством невесомой штанги длиной $L = 3\,м$, неподвижно скрепленной с баком, подвешен к шарниру A (см. рис. 1). Вода вытекает из бокового отверстия площадью $S = 2\,см^2$, просверленного в баке около его дна со скоростью $V = 4{,}4\,м/сек$. На какой угол от вертикали отклонится бак? (Понижением уровня воды в баке вследствие вытекания пренебречь; считать угол отклонения малым).

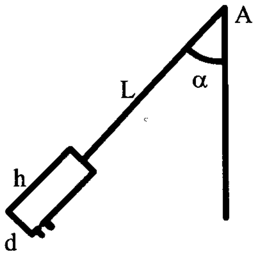

Рис. 1

Ф6. Электромотор постоянного тока, включенный в цепь батареи с $ЭДС$, равной 24 вольта, при полном сопротивлении цепи $R = 20\,ом$ делает 600 оборотов в минуту при токе в цени $0{,}2$ ампера. Какую $ЭДС$ разовьет тот же мотор, работая в качестве динамомашины при 1400 оборотах в минуту?

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

М1. Ответ. $n = 2007$.

Указание. Разбиение на пары всех n-значных чисел, кроме 1000…000 ($n-1$ ноль) и 5000…000 ($n-1$ ноль). Получим, что сумма всех n-значных чисел оканчивается на 6000…000 ($n-1$ ноль).

М2. Доказательство. Если в турнире участвуют m команд, то вместе они набирают $\frac{m(m-1)}{2}$ очков (каждая команда проводит $m-1$ игру). Поэтому $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \geq \frac{10(10-1)}{2} = 45$. В матчах между собой команды, занявшие места со второго по девятое набрали $\frac{9(9-1)}{2} = 36$ очков. Но некоторые из них могли выиграть и у первой команды. Поэтому

$x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} \geq 36$. Аналогично, $x_3 + x_4 + \ldots + x_{10} \geq 28$, …, $x_9 + x_{10} \geq 1$, $x_{10} \geq 0$. Просуммировав все неравенства, получим требуемое.

М3. Доказательство. Пусть, например, K и N – ближайшие к вершине A точки касания, PA пересекает KN в точке T. Из теорем синусов для треугольников AKT и ANT следует $\dfrac{KT}{TN} = \dfrac{\sin\angle KAT}{\sin\angle TAN} = \dfrac{h_1/AP}{h_4/AP} = \dfrac{h_1}{h_4}$, где $h_1, \ldots, h_4$ – расстояния от точки P до сторон четырехугольника $ABCD$. Перемножив такие отношения, получим требуемое.

М4. Доказательство. Заметим, что $AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n = (AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n)\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона боковых граней к основанию пирамиды, а $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ – перпендикуляры, опущенные из точки A на прямые, содержащие стороны основания. Однако $AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n = \dfrac{2S}{a}$, где a – сторона, S – площадь основания пирамиды.

М5. Ответ. $x_1 = 2006$ или $x_1 = 1002$.

Решение. Условию удовлетворяет $x_1 = 2006$. Пусть $x_n = 2006$, где $n \geq 2$. Тогда $2006 = x_n > 2x_{n-1} > 4x_{n-2} > \ldots > 2^{n-1}x_1 \geq 2^{n-1}$, откуда $n \leq 11$. Из равенства $2x_{n-1} = x_n - n = 2006 - n$ следует, что n – четно. Перебрав случаи $n = 2, 4, 6, 8, 10$, получаем, что лишь при $n = 2$ требуемая прогрессия существует (в этом случае $x_1 = 1002$).

М6. Ответ. а, б) Нельзя.

Решение.

а) Перемещаясь за один шаг из какой-либо клетки таблицы в соседнюю, можно не более чем за 8 шагов перейти из клетки с числом 1 в клетку с числом 25, причем таких путей будет больше одного. Однако от 1 до 25 с шагом не больше трех можно дойти не менее чем за 8 шагов, причем в случае 8 шагов способ единственный ($1 \to 4 \to 7 \to \ldots \to 25$).

б) Рассмотрим квадрат 2×2, в одной из клеток которого записано число 13. Тогда из условия следует, что в одной из соседних с этой клеток записано число 1, а в другой записано число 25. Но тогда в четвертой клетке рассматриваемого квадрата опять должно стоять число 13.

М7. Доказательство. Из условия следует, что $ACNK$ – параллелограмм, поэтому $AK = CN$ и, значит, $KD = EN$. Из подобий треугольников получаем $\dfrac{KL}{AC} = \dfrac{KD}{AD} = \dfrac{EN}{AD} = \dfrac{EN}{EC} = \dfrac{MN}{AC}$, откуда $KL = MN$.

М8. Ответ. а) Может. б) Не может.

Решение.

а) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2005}$ – произвольная возрастающая прогрессия натуральных чисел, s – ее сумма. Тогда сумма членов арифметической прогрессии $a_1 \cdot s^{2005}, a_2 \cdot s^{2005}, \ldots, a_{2005} \cdot s^{2005}$ есть s^{2006}.
б) Заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2005} = a_1 \cdot 2005 + 1002 \cdot 2005d$. То есть сумма делится на 5 и, значит, не может равняться 2006^n.
М9. Доказательство. Введем векторы $\vec{u} = (a;b)$, $\vec{v} = (c;d)$. Тогда $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$,
$(ac + bd)^2 = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot cos^2 \angle(\vec{u};\vec{v})$. Поэтому доказываемое неравенство равносильно неравенству $|cos \angle(\vec{u};\vec{v})| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из условия $a,b,c,d \in [1;\sqrt{3}]$ следует, что $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{b}{a} \leq \sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{d}{c} \leq \sqrt{3}$, то есть векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ образуют с осью Ox углы от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$. Отсюда $\angle(\vec{u};\vec{v}) \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$, и, значит, $cos \angle(\vec{u};\vec{v}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ф1. Когда веревка висит симметрично относительно блока, ее центр тяжести находится на расстоянии $a = \frac{l}{4}$ — от ее концов, или a от блока. В момент соскальзывания с блока центр тяжести будет на расстоянии a от блока. В результат движения центр тяжести опустился на a и следовательно потенциальная энергия уменьшилась на mga. За счет убыли потенциальной энергии веревка приобретает кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$. По закону сохранения энергии $mga = \frac{mv^2}{2}$, $v = \sqrt{2ag} = 10^3 \frac{см}{сек}$.
Веревка двигалась под действием силы, создаваемой разностью весов тех частей ее, которые свешивались с разных сторон от блока. При движении часть веревки, свешивающаяся с одной стороны от блока, все время удлиняется, следовательно действующая сила увеличивается Увеличивающаяся сила при постоянной массе вызывает увеличение ускорения, то есть движение является неравномерно-ускоренным.
Ф2. Так как показания вольтметра одинаковы, значит падение напряжения на вольтметре в первом случае (последовательное включение) равно падению напряжения на вольтметре и параллельно включенном сопротивлении во втором случае.
Подсчитаем силу тока и падение напряжения па вольтметре в обоих случаях. Пусть E — ЭДС аккумулятора, r — его внутреннее сопротивление. Тогда:
а) ток в цепи при последовательном соединении вольтметра $i = \frac{E}{R + R_v + r}$.

Падение напряжения на вольтметре $v_1 = \dfrac{R_v E}{R + R_v + r}$

б) ток в цепи при параллельном включении вольтметра $i = \dfrac{E}{\dfrac{RR_v}{R + R_v} + r}$.

Падение напряжения на вольтметре $v_2 = \dfrac{E(R + R_v)}{RR_v + Rr + R_v r} \cdot \dfrac{RR_v}{R + R_v}$,

$v_1 = v_2$, $\dfrac{R_v}{R + R_v + r} = \dfrac{RR_v}{RR_v + Rr + R_v r}$, $r = \dfrac{R^2}{R_v} = 0{,}1\ Ом$.

Ф3. Давление влажного воздуха в сосуде складывается по закону Дальтона из давления пара при $100°C$ и давления сухого воздуха при $100°C$: $p_x = p_1 + p_2$, где p_1 – давление сухого воздуха, p_2 – давление пара. Давление сухого воздуха определяется по закону Шарля $p_1 = p_0 \cdot \dfrac{T}{T_0} = \dfrac{1\ атм \cdot 373°}{273°} = 1{,}37\ атм$. Давление пара найдем, считая его идеальным газом. Одна грамм молекула газа при нормальных условиях занимает объем $22{,}4\ л$. Т.е. $v_0 = 22{,}4 \cdot \dfrac{3}{18} = 3{,}7\ л$. Из объединенного закона газового состояния $\dfrac{p_0 v_0}{T_0} = \dfrac{p_1 v_1}{T_1}$ определим давление пара в сосуде с объемом $v = 10\ л$, при температуре $T = 373°$, $p_2 = \dfrac{p_0 v_0 T}{T_0 v} = 0{,}51\ атм$, т.о. пар не насыщен $p_2 < 1\ атм$ и $p_x = p_1 + p_2 = 1{,}88\ атм$. Если нет проверки на условие насыщенности, снять пол очка.

Ф4. Дальняя точка аккомодации близорукого глаза находится на расстоянии 18 см. У нормального глаза соответствующая точка находится на бесконечности (нормальный глаз видит без напряжения удаленные предметы). Чтобы восполнить недостаток близорукого глаза, нужно поставить перед глазами рассеивающие линзы с таким фокусным расстоянием, чтобы лучи от удаленных предметов (параллельные), казались выходящими из точек, лежащих на расстоянии 18 см. Т.е. фокусное расстояние равно 18 см = 0,18 м. оптическая сила линзы равна $D = \dfrac{1}{F} = -\dfrac{1}{0{,}18} = -5{,}6\ диоптрий$.

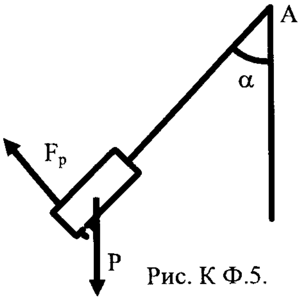

Рис. К Ф.5.

Ф5. Условием равновесия бака в отклоненном положении является равенство моментов сил реакции и силы тяжести по отношению к точке подвеса

$P\left(L+\frac{h}{2}\right)\cdot \sin\alpha = F_P\cdot(L+h), \sin\alpha = \frac{2F_P}{P}\cdot\frac{L+H}{2L+h}$. Обозначим через γ удельный вес воды. Запишем далее $P=\frac{\pi d^2 h\gamma}{4}$, $F_P t = mv$, $F_P = \frac{mv}{t} = \frac{sv^2\gamma}{g}$, $\sin\alpha = \frac{8sv^2}{\pi d^2 hg}\cdot\frac{L+H}{2L+h} = 1{,}4\cdot 10^{-2}$.

Ф6. Падение напряжения во всей цепи равно $I\cdot R$, $E_{инд} = E - I\cdot R$. Если мотор будет работать как динамомашина, то при той же скорости вращения якоря ЭДС динамомашины будет равна $E_{инд}$. Т.к. $E_{инд}$ пропорциональна скорости вращения якоря, то $\frac{E'_{инд}}{E_{инд}} = \frac{n_1}{n_2}$, или $E'_{инд} = E_{инд}\cdot\frac{n_1}{n_2} = (E - I\cdot R)\cdot\frac{n_1}{n_2} = 46{,}6\ B$.

Правила проведения выездной олимпиады

Олимпиада рассчитана в основном на учащихся 10 и 11 классов. Пробовать силы могут, конечно, и девятиклассники, учащиеся ПТУ и техникумов, выпускники прошлых лет.

Рекомендуем предложить для решения три задачи по математике и три по физике, среди которых должно быть по одной легкой по каждому предмету.

Проводить олимпиаду можно как в воскресенье, так и в будние дни, согласовав предварительно срок с работниками народного образования.

Проверку следует проводить на месте. Правильно решенная задача оценивается в 1 балл, оценка частично решенной задачи должна принимать только значения 0,3, 0,6 и 0,9, причем оценка 0,9 балла дается за принципиально правильное решение с мелкими недочетами.

Данные победителей необходимо занести в прилагаемый бланк отчета, заверенный директором школы и печатью. Работы победителей и отчет следует сдать до **1 марта в Межвузовский «Физтех-центр» (439ГК по рабочим дням с 11.00 до 16.00).**

Два победителя награждаются на месте, всем остальным дипломы высылаются (после рассмотрения в Оргкомитете) по почте.

Вся информация об институте находится на сайтах института: www.mipt.ru, www.fizteh.ru, www.abitu.ru – лучше написать их на доске в классе.

Проводя выездную олимпиаду, помни, что ты представляешь Физтех!
Будь сдержан, вежлив, внимателен!

Межвузовский «Физтех-центр»
Оргкомитет физико-математических олимпиад МФТИ

Правила заполнения отчета по выездной олимпиаде

Отчет должен быть заполнен **четко, ручкой, печатными буквами**. В одну клеточку записывается одна буква или цифра.

Данные, полученные из Вашего отчета, будут использованы в работе по целевой подготовке абитуриентов МФТИ. Поэтому важно заполнить все графы отчета, ничего не пропустив.

Обязательно нужно внести **адрес школы** – места проведения олимпиады.

Вы должны вписать **точные домашние адреса с почтовыми индексами победителей олимпиады**, которым «Физтех-центр» будет высылать дипломы, рекомендации поступать в МФТИ, другие материалы.

Студентов, проводивших выездную олимпиаду, планируется премировать. Очевидно, что размер премии будет зависеть от качества заполнения отчетов и полноты предоставленной информации.

Вопросы, оригинальные решения, комментарии по задачам просим сообщать жюри по адресу 141700, г. Долгопрудный, Московской области, Институтский пер., д.9, МФТИ, «Физтех-центр».

Оргкомитет Олимпиады: председатель – директор Межвузовского «Физтех-центра», доцент, к.ф.-м.н., заслуженный работник высшей школы Российской Федерации Шомполов И.Г.; зам. председателя – зам. директора Межвузовского «Физтех-центра», доцент, к.ф.–м.н. Трушин В.Б.; зам. председателя – исполнительный директор Межвузовского «Физтех-центра», к.ф.–м.н. Проценко И.Г.

Жюри Олимпиады: сопредседатель – доцент кафедры высшей математики МФТИ, к.ф.-м.н., заслуженный работник высшей школы Российской Федерации Агаханов Н.Х.; сопредседатель – доцент кафедры общей физики МФТИ, к.ф.-м.н., заслуженный работник высшей школы Российской Федерации Чивилев В.И.; зам. сопредседателя – ассистент кафедры высшей математики МФТИ Подлипский О.К.

Сборник подготовили Александров Д.А., Агаханов Н.Х., Крымский К.М., Подлипский О.К., Проценко И.Г., Сидорова И.Е., Трушин В.Б, Черкасова Е.К., Шомполов И.Г.

Под общей редакцией Шомполова И.Г.

Тираж сборника 600 экземпляров. Размножено на копировальной технике Физтех-центра.